PART4 二項分布の正規分布による近似

要点① 二項分布の正規分布による近似

1回の試行で事象 A が起こる確率が p である試行を n 回繰り返す反復試行において，事象 A が起こる回数を X とすると，X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。このとき

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r\,p^r q^{n-r}\quad (q=1-p,\ r=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$$

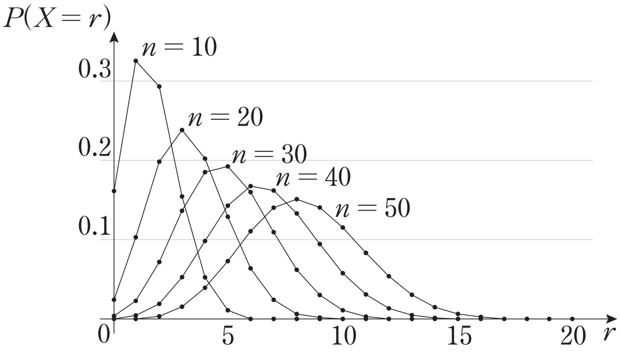
期待値 $E(X)=np$，　分散 $V(X)=npq$，　標準偏差 $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

である。

1個のさいころを n 回投げる試行で1の目が出る回数を X とすると，確率変数 X は二項分布 $B\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$ に従う。この X について，$P(X=r)$ を

$n=10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$

のそれぞれについて計算し，折れ線グラフで表すと右図のようになり，n の値が大きくなるにつれてグラフの形は左右対称の山型に近づいていく。

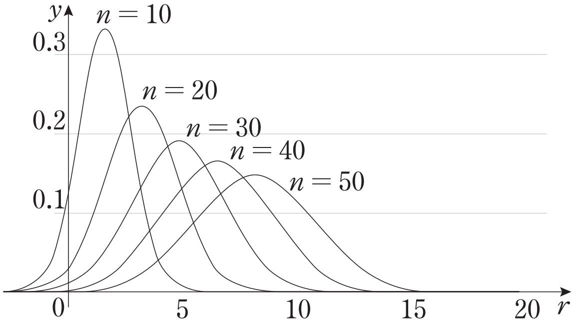


二項分布 $B\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$ の期待値は $n\cdot\frac{1}{6}=\frac{n}{6}$，分散は $n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5n}{36}$ である。

ここで，この二項分布と期待値，分散が等しい正規分布 $N\left(\frac{n}{6},\ \frac{5n}{36}\right)$ の分布曲線を

$n=10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$

について描くと，右図のようになり，二項分布 $B\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$ のグラフは，n が大きくなるにつれて正規分布 $N\left(\frac{n}{6},\ \frac{5n}{36}\right)$ のグラフに近づくことがわかる。



一般に，次のことが成り立つ。

二項分布の正規分布による近似

二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき，正規分布 $N(np,\ npq)$ に従うとみなしてよい。ただし，$q=1-p$ とする。

例　1 個のさいころを 720 回投げるとき，6 の目が出る回数が 110 回以下である確率を求める。

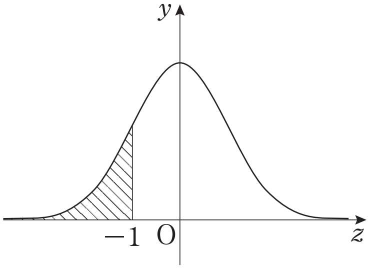
6 の目が出る回数を X とすると，X は二項分布　　　　　に従うから

$$E(X)= \qquad =120,\qquad V(X)= \qquad =100,\qquad \sigma(X)= \qquad =10$$

$n=720$ は十分に大きいから，X は正規分布　　　　　に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\dfrac{X\qquad}{\qquad}$ とすると，Z は標準正規分布　　　　に従うので，求める確率は

$$\begin{aligned}P(X\leqq 110)&=P(Z\leqq -1)\\&=P(Z\leqq 0)-P(-1\leqq Z\leqq 0)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$



＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

4　1枚の硬貨を1600回投げるとき，表の出る回数が789回以上である確率を求めよ。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Point Pickup

二項分布の正規分布による近似

二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき

正規分布 $N(np,\ npq)$　　$(q=1-p)$

に従うとみなしてよい。

正規分布で近似し，さらに確率変数の標準化を行うことで，正規分布表を用いて確率を求めることができる。

第 9 講 PART4 確認問題

1 1個のさいころを500回投げるとき，1の目が出る回数が100回以下である確率は0. アイウエ である。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

PART4 二項分布の正規分布による近似

4 1枚の硬貨を1600回投げるとき，表の出る回数が789回以上である確率を求めよ。

< 正規分布表 >

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

[解答]

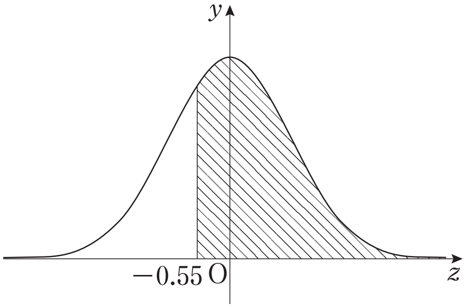
表が出る回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(1600,\ \frac{1}{2}\right)$ に従うから

$$E(X)=1600\cdot\frac{1}{2}=800,\quad V(X)=1600\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=400,\quad \sigma(X)=\sqrt{400}=20$$

$n=1600$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(800,\ 20^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\frac{X-800}{20}$ とすると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので，求める確率は

$$\begin{aligned}P(X\geqq 789)&=P(Z\geqq -0.55)\\&=P(-0.55\leqq Z\leqq 0)+P(Z\geqq 0)\\&=P(0\leqq Z\leqq 0.55)+P(Z\geqq 0)\\&=0.2088+0.5\\&=0.7088\end{aligned}$$



第 9 講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** アイウエ：9772

[解説]

1の目が出る回数を X とすると，X は二項分布

$B\left(500,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従うから

$$E(X)=500\cdot\frac{1}{6}=\frac{250}{3}$$ [A]

$$V(X)=500\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{625}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{625}{9}}=\frac{25}{3}$$

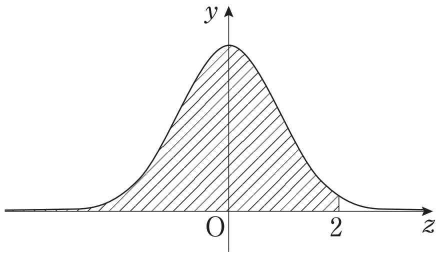
$n=500$ は十分に大きいから，X は正規分布

$N\left(\dfrac{250}{3},\ \left(\dfrac{25}{3}\right)^2\right)$ に従うとみなしてよい。 [B]

ここで，$Z=\dfrac{X-\dfrac{250}{3}}{\dfrac{25}{3}}=\dfrac{3X-250}{25}$ とすると，Z は

標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので，求める確率は

$$\begin{aligned}&P(X\leqq 100)\\=&P(Z\leqq 2)\\=&P(Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 2)\\=&P(Z\geqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 2)\\=&0.5+0.4772=\mathbf{0.9772}\end{aligned}$$



[A]　確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると
$E(X)=np$，$V(X)=npq$，
$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

[B]　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき，正規分布 $N(np,\ npq)$ に従うとみなしてよい。ただし，$q=1-p$